

2.9.6 Exponenciální rovnice III

Předpoklady: 2905

Př. 1: Vyřeš rovnici $2^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 2^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{2}{9}$.

Problém: Zdá se, že máme dva výrazy na substituci $a = 2^x$ a $b = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Taková substituce nemá smysl, v rovnici by se objevily dvě neznámé místo jedné (našli bychom nekonečně mnoho dvojic řešení a nevěděli bychom, co dál) \Rightarrow musíme ze dvou výrazů udělat jeden

$$\Rightarrow 2^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{9}$$

Substituce: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = a \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)a - a = \frac{2}{9}$

$$\frac{1}{2}a = \frac{2}{9}$$

$$a = \frac{4}{9}$$

Návrat k původní proměnné:

$$a = \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x = 2$$

$$K = \{2\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnici $20 \cdot 2^x - 2^{x+1} = 3^{x+2} - 3^x$.

Problém: Zdá se, že máme dva výrazy na substituci $a = 2^x$ a $b = 3^x$. Taková substituce nemá smysl, v rovnici by se objevily dvě neznámé místo jedné \Rightarrow musíme ze dvou výrazů udělat jeden \Rightarrow vydělíme rovnici výrazem $3^x \Rightarrow$ na pravé straně se exponenty s x vykrátí, na levé straně zbudou zlomky.

$$20 \cdot 2^x - 2^{x+1} = 3^{x+2} - 3^x \quad /: 3^x$$

$$20 \cdot \frac{2^x}{3^x} - \frac{2^{x+1}}{3^x} = \frac{3^{x+2}}{3^x} - \frac{3^x}{3^x}$$

$$20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^x = 9 \cdot 1 - 1$$

Substitute: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = a \Rightarrow 20a - 2a = 8.$

$$18a = 8$$

$$a = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Návrat k původní proměnné:

$$a = \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x = 2$$

$$K = \{2\}$$

Př. 3: Vyřeš rovnici $3 \cdot 5^{x-2} + 7 \cdot 5^{x-3} = 5 \cdot 3^{x-3} + 5^{x-1}.$

Podobné jako předchozí příklad. Jakým výrazem vydělit?

Nejvýhodnější: $5^{x-3} \Rightarrow$ zbude jediný výraz s neznámou a nezískáme zlomky.

$$3 \cdot 5^{x-2} + 7 \cdot 5^{x-3} = 5 \cdot 3^{x-3} + 5^{x-1} \quad / : 5^{x-3}$$

$$3 \cdot \frac{5^{x-2}}{5^{x-3}} + 7 \cdot \frac{5^{x-3}}{5^{x-3}} = 5 \cdot \frac{3^{x-3}}{5^{x-3}} + \frac{5^{x-1}}{5^{x-3}}$$

$$3 \cdot 5 + 7 \cdot 1 = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3} + 25 \Rightarrow \text{ani nemusíme substituovat.}$$

$$-3 = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$$

$$-\frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3} \quad \text{Pravá strana: } \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3} > 0 \Rightarrow \text{rovnice nemá řešení (levá strana: } -\frac{3}{5} < 0).$$

$$K = \emptyset$$

Pedagogická poznámka: Zvolení výrazu k vydělení si určitě zaslouží společnou diskusi se třídou. Jde o dobrou ukázkou toho, jak je výhodné „myslet dopředu“.

Studenti často dojdou k výsledku $\left(-\frac{3}{5}\right)^1 = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3} \Rightarrow x = 4.$ Svou roli hraje i fakt, že zatím všechny rovnice měly řešení.

Dodatek: Závěrečnou úvahu jsme mohli udělat už o krok dříve u rovnosti $-3 = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}.$

Př. 4: Vyřeš rovnici $3 \cdot 2^{2-x} + 2 \cdot 2^{1-x} = 8 \cdot 3^{2-x} + 3 \cdot 3^{1-x}.$

Podobné jako předchozí příklad.

$$3 \cdot 2^{2-x} + 2 \cdot 2^{1-x} = 8 \cdot 3^{2-x} + 3 \cdot 3^{1-x} \quad / 3^{2-x}$$

$$3 \cdot \frac{2^{2-x}}{3^{2-x}} + 2 \cdot \frac{2^{1-x}}{3^{2-x}} = 8 \cdot \frac{3^{2-x}}{3^{2-x}} + 3 \cdot \frac{3^{1-x}}{3^{2-x}}$$

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} + 2 \cdot \frac{2^{2-x-1}}{3^{2-x}} = 8 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} + 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} = 8 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{3}$$

Substitute: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} = a \Rightarrow 3a + a = 9$

$$4a = 9$$

$$a = \frac{9}{4}$$

Návrat k původní proměnné:

$$a = \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$2 - x = -2$$

$$x = 4$$

$$K = \{4\}$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde o překonání psychické bariéry ze záporného x .

Př. 5: Vyřeš rovnici $2 \cdot 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1}$.

Hledáme výraz na substituci:

- Rovnice obsahuje tři základy \Rightarrow určitě musíme jeden ze základů převést na druhý (zřejmě $4 \leftrightarrow 2$) a budeme jedním ze získaných výrazů dělit.
- Snažíme se o takovou substituci, aby po jejím provedení byla rovnice co nejjednodušší (například neobsahovala odmocniny).

Zkusíme, zda půjde $3^{x-\frac{1}{2}} = a \Rightarrow$ musíme se snažit ve všech členech vyrobít exponent $x - \frac{1}{2}$.

$$\bullet \quad 3^{x+\frac{1}{2}} = 3^{x-\frac{1}{2}+1} = 3 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}}$$

$$\bullet \quad 2^{2x-1} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{2x-1} = 4^{\frac{2x-1}{2}} = 4^{x-\frac{1}{2}}$$

$$\bullet \quad 4^x = 4^{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} = 2 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}}$$

Dosadíme do rovnice:

$$2 \cdot 2 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}} + 4^{x-\frac{1}{2}} \quad /: 4^{x-\frac{1}{2}}$$

$$4 \cdot \frac{4^{x-\frac{1}{2}}}{4^{x-\frac{1}{2}}} - \frac{3^{x-\frac{1}{2}}}{4^{x-\frac{1}{2}}} = 3 \cdot \frac{3^{x-\frac{1}{2}}}{4^{x-\frac{1}{2}}} + \frac{4^{x-\frac{1}{2}}}{4^{x-\frac{1}{2}}}$$

$$4 - \left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}} = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}} + 1$$

Substitute: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}} = a \Rightarrow 4 - a = 3a + 1$

$$3 = 4a$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Návrat k původní proměnné:

$$a = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = 1$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$K = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Příklad je zajímavý kvůli volbě substituce. Pokud ho nestihnete normálním průchodem, zkuste si s třídou probrat alespoň použitou substituci.

Př. 6: Vyřeš rovnici $9^{x+1} + 5 \cdot 6^x = 4^{x+1}$.

Problém: Zdá se, že máme dokonce tři výrazy na substituci $a = 9^x$, $b = 6^x$ a $c = 4^x$. Taková substituce nemá smysl, v rovnici by se objevily tři neznámé místo jedné \Rightarrow ze tří výrazů uděláme dva (pak budeme mít podobný příklad, jako jsou předchozí) \Rightarrow platí $6^x = 2^x \cdot 3^x$.

$$9^{x+1} + 5 \cdot 2^x \cdot 3^x = 4^{x+1} \quad (\text{zkusíme převést i } 9^x = 3^x \cdot 3^x \text{ a } 4^x = 2^x \cdot 2^x)$$

$$9 \cdot 9^x + 5 \cdot 2^x \cdot 3^x = 4 \cdot 4^x$$

$$9 \cdot 3^x \cdot 3^x + 5 \cdot 2^x \cdot 3^x = 4 \cdot 2^x \cdot 2^x$$

\Rightarrow Vydělíme rovnici výrazem $2^x \cdot 2^x \Rightarrow$ na pravé straně se exponenty s x vykrátí, na levé straně zbudou zlomky.

$$9 \cdot 3^x \cdot 3^x + 5 \cdot 2^x \cdot 3^x = 4 \cdot 2^x \cdot 2^x \quad /: (2^x \cdot 2^x)$$

$$9 \cdot \frac{3^x \cdot 3^x}{2^x \cdot 2^x} + 5 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{2^x \cdot 2^x} = 4 \cdot \frac{2^x \cdot 2^x}{2^x \cdot 2^x}$$

$$9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 4 \cdot 1$$

Substitute: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = a \Rightarrow 9a \cdot a + 5a = 4.$

$$9a^2 + 5a - 4 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-4)}}{2 \cdot 9} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{18} = \frac{-5 \pm 13}{18}$$

$$a_1 = \frac{-5 + 13}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \quad a_2 = \frac{-5 - 13}{18} = -1$$

Návrat k původní proměnné:

$$a_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

$$x_1 = -2$$

$$K = \{-2\}$$

$$a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2} = -1$$

žádné řešení $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$ (každá mocnina kladného čísla je kladná)

Př. 7: Vyřeš rovnici $4 \cdot 16^x + 4^{x+1} = 2 \cdot 8^{x+1} + 2^{3x}$.

Problém: V rovnici je několik různých základů mocnin, všechny základy jsou mocninami dvojky \Rightarrow všechny základy převedeme na mocniny dvou.

$$4 \cdot 16^x + 4^{x+1} = 2 \cdot 8^{x+1} + 2^{3x}$$

$$4 \cdot (2^4)^x + (2^2)^{x+1} = 2 \cdot (2^3)^{x+1} + 2^{3x}$$

$$4 \cdot 2^{4x} + 2^{2x+2} = 2 \cdot 2^{3x+3} + 2^{3x} \quad (\text{upravíme exponenty tak, aby obsahovaly jenom násobky } x)$$

$$4 \cdot 2^{4x} + 2^2 \cdot 2^{2x} = 2 \cdot 2^3 \cdot 2^{3x} + 2^{3x}$$

Při substituci $a = 2^x$ bychom získali příliš velké mocniny \Rightarrow vydělíme rovnici výrazem 2^{2x} .

$$4 \cdot 2^{4x} + 4 \cdot 2^{2x} = 16 \cdot 2^{3x} + 2^{3x} \quad /: 2^{2x}$$

$$4 \cdot \frac{2^{4x}}{2^{2x}} + 4 \cdot \frac{2^{2x}}{2^{2x}} = 16 \cdot \frac{2^{3x}}{2^{2x}} + \frac{2^{3x}}{2^{2x}}$$

$$4 \cdot 2^{2x} + 4 = 16 \cdot 2^x + 2^x$$

Substituce: $2^x = a \Rightarrow 4a^2 + 4 = 16a + a$

$$4a^2 - 17a + 4 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}$$

$$a_1 = \frac{17+15}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$a_2 = \frac{17-15}{8} = \frac{1}{4}$$

Návrat k původní proměnné:

$$a_1 = 2^{x_1} = 4$$

$$2^{x_1} = 2^2$$

$$x_1 = 2$$

$$a_2 = 2^{x_2} = \frac{1}{4}$$

$$2^{x_2} = 2^{-2}$$

$$x_2 = -2$$

$$K = \{-2; 2\}$$

Př. 8: Petáková:

strana 34/cvičení 4 b) c) d)

strana 34/cvičení 5 a) b)

Shrnutí: V některých případech můžeme připravit rovnici k substituci vydělením.